非コンパクト支台を持つ解析汎函数も解析函数である (場の量子論の代数解析的研究)

森本, 光生; 吉野, 邦生

数理解析研究所講究録
324巻 1978年 97-105

非コンパクト支台を持つ解析汎函数も解析函数である。

上智大 理工 森本 光生
吉野 邦生

§0. はじめに

この小文の目的は、非コンパクトな支台を持つ解析汎函数に対する種々のコーシー変換について論じ、指数型函数の一意性定理についてのCarlsonの定理をその応用として証明してみせることにある。

通常の解析汎函数に対するコーシー変換の核は、$(t-z)^{-1}$であるが、非コンパクト支台を持つ解析汎函数に対しては、核を修正しなくてはならない。又、修正された核は、$(t-z)^{-1}$を主要部として持たなければならない。従来、$(t-z)^{-1}e^{(t-z)}$, $(t-z)^{-1}e^{-(t-z)^2}$を用いていた。例えば森本[3]を参照せよ。ここでは、$(1-\exp(z-t))^{-1}$を"コーシー核"としてえらぶ。この核は、Avanissian-Gayが、($w=e^{-t}$とおいて)[1]ではじめて用いたものである。

§1では、コンパクトな支台を持つ解析汎函数の理論につ

いて復習し、§2で、非コンパクトな支台(ここでは、半帯領域に支台)をもつ、指数型の解析汎函数を定義し、その性質を述べる。

§3では、$(1-\exp(z-t))^{-1}$ を核とする変換、又は、Avanissian-Gay 変換に関する定理を述べる。

§4では、以上の応用として、Carlson の定理を証明する。この小文の結果は、n 変数の場合に拡張可能である。又、詳しい証明は、森本-吉野[5]に載せてある。

§1、解析汎函数

Lを複素平面上のコンパクト集合とする。$\mathcal{O}(L)$で、L上の正則函数の芽の全体を表わす。$\mathcal{O}(L)$は、DFS-空間になることが、知られている。$\mathcal{O}'(L)$で、$\mathcal{O}(L)$の双対空間を表わす。$\mathcal{O}'(L)$の元の事を、Lに支台を持つ解析汎函数と言う。

$T \in \mathcal{O}'(L)$に対し、次の式で、2つの変換を定める。

(1.1) $\hat{T}(\zeta) = \langle T_z, e^{\zeta z} \rangle$

(1.2) $\check{T}(t) = \langle T_z, (t-z)^{-1} \rangle$

(1.1)をTのフーリエ・ボレル変換、(1.2)をTのコーシー変換と呼ぶ。Lを、コンパクト凸集合とすると、$\mathcal{O}'(L)$のフーリエ・ボレル変換の像が、決まり、次のようになる。

(1.3) $$\mathrm{Exp}(\mathbb{C}:L)=\left\{f\in\mathcal{O}(\mathbb{C}):\ {}^{\forall}\varepsilon>0,\ {}^{\exists}C\geqq 0,\ |f(\zeta)|\leqq C\cdot\exp(h_L(\zeta)+\varepsilon|\zeta|)\right\}$$

$$h_L(\zeta)=\sup_{z\in L}\mathrm{Re}\langle z,\zeta\rangle$$

又、コーシー変換の像は、次のようになる。

(1.4) $$\mathcal{O}_0(\mathbb{C}\setminus L)=\left\{f\in\mathcal{O}(\mathbb{C}\setminus L):\ \lim_{|z|\to\infty}|f(z)|=0\right\}$$

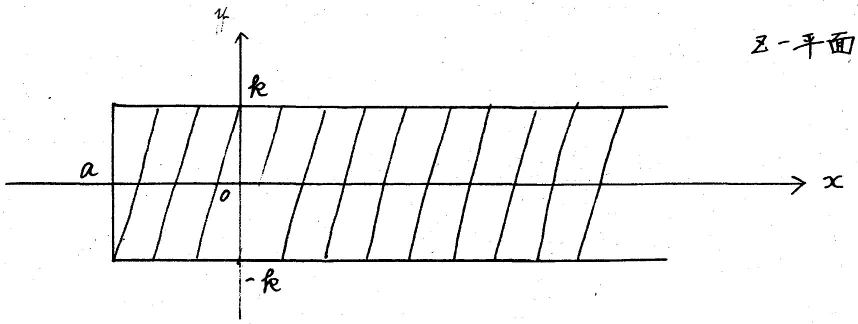
(1.3)式の証明には、次の図式の可換性が、用いられる。

(1.5) $$\begin{tikzcd}[column sep=large] \mathcal{O}'(L) \arrow[rr, "\text{フーリエ・ボレル}", "\text{変換}"'] \arrow[dr, "\text{コーシー変換}"'] & & \mathrm{Exp}(\mathbb{C}:L) \arrow[dl, "\text{フーリエ・ラプラス変換}"] \\ & \mathcal{O}_0(\mathbb{C}\setminus L) & \end{tikzcd}$$

§2、非コンパクトな支台を持つ解析汎函数

$$L=[a,\infty)+i[-k,k]\qquad -\infty<a<+\infty\quad k\geqq 0$$

なる半帯領域を考えよう。(次図参照)



次のように函数空間を設定する。

$$(2.1)\quad Q(L:k') = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ \varepsilon>0,\ \varepsilon'>0}} \mathrm{ind}\, Q_b(L_\varepsilon : k'+\varepsilon')$$

但し、$Q_b(L_\varepsilon : k'+\varepsilon')$

$$=\left\{ f\in \mathcal{O}(L_\varepsilon^\circ)\cap C(L_\varepsilon) : \sup_{z\in L_\varepsilon} \left| f(z)e^{(k'+\varepsilon')z} \right| < +\infty \right\}$$

ここで、L_εは、Lのε－近傍を表わし、L_ε°は、L_εの内包を表わす。$Q(L:k')$の元の例としては、次のようなものがある。

e^{-z^2}, $e^{\zeta z}$ ($\mathrm{Re}\,\zeta < -k'$), $(1-we^{z})^{-1}$ ($k'<1$, $w\in \mathbb{C}\,|\,\exp(-L)$)

$Q(L:k')$には、バナッハ空間$Q_b(L_\varepsilon : k'+\varepsilon')$の帰納極限の位相を入れる、DFS空間となる。$Q(L:k')$の双対空間を$Q'(L:k')$で表わし、$Q'(L:k')$の元を、$L$に支台を持つ指数型$k'$の解析汎函数と呼ぶ。コンパクト集合$K$が、単連結で、$K\subset L$とすると、$\mathcal{O}'(K)\hookrightarrow Q'(L:k')$と考えられる。

$\sum_{m=1}^{\infty} a^m \delta'(x-m)$ ($k'\geq 0$) 但し、$\langle \delta'(x-m), f\rangle = -f'(m)$

は、非コンパクトな支台を持つ解析汎函数の例である。

さて、$T \in Q'(L:k')$ のフーリエ・ボレル変換を次のように定義する。

(2.2) $\hat{T}(\zeta) = \langle T_z, e^{\zeta z} \rangle$

この時、次の定理が、成立する。

<u>定理</u> 1 (森本〔3〕)

$$Q'(L:k') \cong \mathrm{Exp}(\{\zeta \mid \mathrm{Re}\,\zeta < -k'\} : L)$$

但し、$\mathrm{Exp}(\{\zeta \mid \mathrm{Re}\,\zeta < -k'\} : L)$

$$= \{ f \in \mathcal{O}(\{\zeta \mid \mathrm{Re}\,\zeta < -k'\} ; \ \forall \varepsilon > 0, \forall \varepsilon' > 0, \ \exists C \geqq 0,$$
$$|f(\zeta)| \leqq C \cdot \exp((a-\varepsilon)\mathrm{Re}\,\zeta + (k+\varepsilon)|\mathrm{Im}\,\zeta|) \}$$

証明には、(1.5) 図と同様の可換図式を作る。この節の詳しい内容は、森本〔4〕を見よ。非コンパクトな支台を持つ解析汎函数の空間 $Q'(L:k')$ が、解析函数の空間 $\mathrm{Exp}(\{\zeta \mid \mathrm{Re}\,\zeta < -k'\} : L)$ と同型であることを強調しよう。

§3. Avanissian - Gay 変換

この節では、L の幅は、2π 未満 (すなわち、$k < \pi$) と仮定する。

さて、$T \in Q'(L:k')$ に対し、

$$G_T(w) = \langle T_z, (1 - w e^z)^{-1} \rangle$$

とおき、Tの Avanissian－Gay 変換と呼ぶ。$G_T(w)$ は、次の性質をもつ。

(i) $G_T(w) \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \exp(-L))$

(ii) $\lim_{|w| \to \infty} G_T(w) = 0$

(iii) $G_T(w) = -\sum \hat{T}(-n) w^{-n}$ （$|w| > e^{-a}$ で広義一様収束）

(iv) $\forall \varepsilon > 0,\ \forall \varepsilon' > 0,\ \exists C \geqq 0,$ such that

$$|G_T(w)| \leq C \cdot |w|^{-k'-\varepsilon'} \quad \text{for} \quad k + \varepsilon \leqq |\arg w| \leqq \pi$$

$G_T(w)$ の性質をコーシ変換に相当する核 $(1 - \exp(z-t))^{-1}$ を用いた変換で記述すると、(i)，(ii)，(iii)，(iv) はそれぞれ次のようになる。

① $G_T(e^{-t}) \in \mathcal{O}_{per}(\mathbb{C} \setminus \bigcup_{j=-\infty}^{\infty} (2j\pi i + L))$

ここで、$\mathcal{O}_{per}$ は、周期 $2\pi i$ を持つ正則函数の空間を意味する。

② $\lim_{\mathrm{Re}\, t \to -\infty} G_T(e^{-t}) = 0$

③ $G_T(e^{-t}) = -\sum_{n=1}^{\infty} \hat{T}(-n) e^{-nt}$ （$\mathrm{Re}\, t < a$）

④ $|G_T(e^{-t})| \leq C \cdot e^{-(k'+\varepsilon')\mathrm{Re}\, t}$ （$k + \varepsilon \leqq \mathrm{Im}\, t \leqq \pi$）

(i)，(ii) の性質を持つ函数としては、$\{z(z-1)\}^{-\frac{1}{2}}$，$\{z(z-1)\}^{\frac{1}{2}} P(z)^{-1}$ （$P(0) \neq 0$，$\deg P(z) \geqq 2$）

などがある。

広義積分の収束に注意すると、コーシー変換の時と同様に次の反転公式が成り立つ。

$$(3.1) \qquad \langle T, h \rangle = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial L_\varepsilon} G_T(e^{-t})\, h(t)\, dt$$

但し、$0 \leqq k' < 1$, $T \in Q'(L : k')$, $h \in Q_b(L_\varepsilon : k'+\varepsilon')$

さて、先の①②④を満たす函数の全体を、$\mathcal{O}_{0,per}(\mathbb{C} \setminus L : k')$ と書くと、次の同型が成り立つ。

定理2 (森本、吉野)

$$Q'(L : k') \cong \mathcal{O}_{0,per}(L : k')$$

§4. Carlsonの定理

Carlson の定理は、ポテンシャル散乱論において、散乱振幅の積分表示の一意性を示す時に、使われる。詳しい事は、De Alfaro-Regge [2]を見よ。

定理3 (Carlson) $0 \leqq k' < 1$, $0 \leqq k < \pi$ とする

$f \in Exp(L : k')$ であり、かつ $f(-n) = 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$ とすると、$f \equiv 0$

（証明）定理1により、$f(\zeta)=\hat{T}(\zeta)=\langle T_z, e^{z\zeta}\rangle$ となる $T\in Q'(L:k')$ が存在する。

(3.1) により、

$$f(\zeta)=\langle T_z, e^{z\zeta}\rangle=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial L} G_T(e^{-t})e^{\zeta t}dt$$

さて、$G_T(e^{-t}) = -\sum_{n=1}^{\infty}\hat{T}(-n)e^{-nt} = -\sum_{n=1}^{\infty}f(-n)e^{-nt}$

であるから、$f(-n)=0$ なる仮定により、$G_T(e^{-t})=0$

故に、$f(\zeta)=0$ //

参考文献

(1) V. Avanissian and R. Gay: Sur une transformation des fonctionelles analytiques et ses applications aux fonctions entières de plusieurs variables, Bull. Soc. math. France 103 (1975).

(2) ダルファロ－レッジェ：ポテンシャル散乱論 講談社

(3) 森本光生：On the Fourier ultra-hyperfunction I

数理研講究録、192 (1973)、10－34

(4) 森本光生：フーリエ変換と超函数　上智大学講究録 No 2、(1978)

(5) 森本光生－吉野邦生：a Uniqueness theorem for holomorphic functions of exponential type, Hokkaido Math. J. 7 (1978), to appear